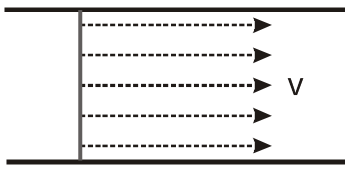
1.8.10 Proudění reálné tekutiny

Předpoklady: 1809

Ideální kapalina: nestlačitelná, dokonale tekutá, bez vnitřního tření.
Reálná kapalina: vzájemné posouvání částic brzdí síly vnitřního tření.

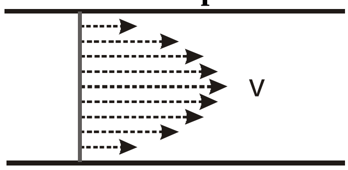
Jaké mají tyto rozdíly důsledky pro proudění reálné kapaliny?

Ideální kapalina



Rychlost částic kapaliny je ve všech místech trubice stejná.

Reálná kapalina



Největší rychlost mají částice, které procházejí středem trubice. Směrem ke stěnám trubice rychlost částic klesá.

K překonání sil vnitřního tření je třeba vykonat mechanickou práci $\Rightarrow$

- zvyšuje se vnitřní energie $\Rightarrow$ zvyšuje se teplota,
- neplatí zákon zachování mechanické energie.

Proudění reálné kapaliny neprobíhá vždy stejně:

- malé rychlosti: vektory rychlosti částic jsou rovnoběžné, proudnice jsou rovnoběžné, obraz je ustálený – **laminární proudění**,
- velké rychlosti: tvoří se víry, zachycení situace pomocí vektorů rychlosti i proudnic se neustále mění – **turbulentní proudění** (obtížné určení objemového průtoku výpočtem).

Přechod mezi laminárním a turbulentním prouděním závisí na druhu kapaliny a průřezu trubice. Určuje se pomocí Reynoldsova čísla.

Př. 1: Pro pohyb ideální kapaliny jsme odvodili dvě rovnice - rovnici kontinuity a Bernoulliho rovnici. Kterou z nich bude možné používat i pro popis reálné kapaliny? Proč?

Rovnice kontinuity platí i pro reálné kapaliny velice přesně (jsou skoro nestlačitelné $\Rightarrow$ nemohou se v trubici hromadit bez ohledu na to, jak složitě v ní proudí).
Bernoulliho rovnice pro reálné kapaliny platí pouze přibližně, protože v reálných kapalinách dochází vlivem vnitřního tření ke ztrátám energie (a Bernoulliho rovnice je v podstatě zákonem zachování energie).

- Tekutina se pohybuje, v cestě má překážku (voda obtéká kameny, nebo vzduch fouká kolem domů),
- tekutina je v klidu, pohybuje se v ní těleso (jízda auta nebo člověka na kole, plavba lodě),
- pohybuje se tekutina i těleso,

$\Rightarrow$ dochází k vzájemnému pohybu tekutiny a nějakého tělesa - (reálná) **tekutina obtéká těleso** $\Rightarrow$ tekutina působí na těleso odporovou silou (způsobena jednak nenulovou hmotností tekutiny, jednak jejím třením).

Obtékání je velice složitý děj $\Rightarrow$ podobně jako u tření sestavujeme pouze přibližné vzorce, které lépe nebo hůře popisují typické situace.

Nejdůležitější veličinou, která ovlivňuje charakter obtékání je vzájemná rychlost.

Nízké rychlosti:

- Proudění tekutiny v okolí tělesa při obtékání je většinou laminární (samozřejmě, ale záleží na tvaru tělesa).
- Odporová síla závisí na první mocnině rychlosti.
- Pro běžné kapaliny a tělesa tvaru koule platí Stokesův vzorec: $F = 6\pi\eta rv$ (η je takzvaná dynamická viskozita kapaliny, v její rychlost a r je poloměr tělesa tvaru koule).

Vyšší rychlosti:
Obtékání začíná být turbulentní (alespoň částečně).
Odporová síla je úměrná spíše druhé mocnině rychlosti. Příkladem je například jízda na kole.

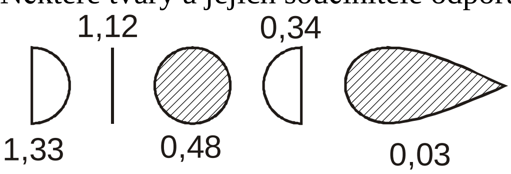
Př. 2: Navrhni veličiny, na kterých závisí odpor vzduchu při jízdě na kole.

Rychlost jízdy v, velkost plochy, která je nastavena větru S a na tvaru předmětu.

Newtonův vztah pro odpor vzduchu: $F = \frac{1}{2}CS\rho v^2$**.**

- C - součinitel odporu, popisuju tvar tělesa,
- S - obsah průřezu kolmého ke směru pohybu,
- ρ - hustota vzduchu,
- v - rychlost.

Některé tvary a jejich součinitele odporu jsou na obrázku:



- velkou hodnotu C (velký odpor vzduchu) má padák,
- malou hodnotu C mají moderní auta (úspora paliva),
- hodnotu C zvyšují ostré hrany, zaoblené rohy C zmenšují,
- součinitel odporu se běžně určuje spíše měřením než výpočtem,
- vysoce aerodynamický tvar má také mnoho živočichů, zejména těch, kteří se rychle pohybují ve vodě.

Vysoké rychlosti (srovnatelné s rychlostí zvuku v daném prostředí)
Odpor vzduchu je úměrný třetí mocnině rychlosti tělesa.
Těleso pak vytváří velmi hlasité rázové vlny.

Dodatek: Všechny vzorce pro odpor vzduchu jsou už ze své podstaty vzorce přibližné stejně jako například vzorce pro smykové tření.

Př. 3: Parašutista vyskočí z letadla. Nejdříve padá se zavřeným padákem. Zrychluje, ale po určité době se jeho rychlost ustálí a padá rovnoměrně. Poté otevře padák, jeho pád se zpomaluje až do okamžiku, kdy začne opět padat rovnoměrně.
Porovnej velikost odporu vzduchu, který na parašutistu působí:
a) když rovnoměrně padá se zavřeným padákem,
b) když rovnoměrně padá s otevřeným padákem.

Během pádu působí na parašutistu dvě síly:

- F_g - gravitační síla Země (během pádu se nemění),
- F_v - odpor vzduchu.

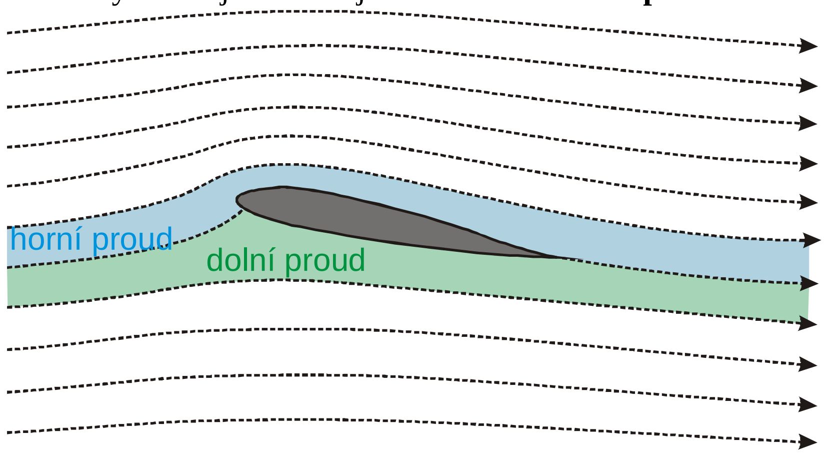
a) Parašutista rovnoměrně padá se zavřeným padákem.
Rovnoměrný pohyb $\Rightarrow$ na parašutistu působí nulová výsledná síla $\Rightarrow$ musí platit $F_v = F_g$.

b) Parašutista rovnoměrně padá s otevřeným padákem.
Rovnoměrný pohyb $\Rightarrow$ na parašutistu působí nulová výsledná síla $\Rightarrow$ musí platit $F_v = F_g$.

$\Rightarrow$ V obou případech se velikost odporu vzduchu rovná velikosti gravitační síly, kterou na parašutistu působí Země $\Rightarrow$ v obou případech působí na parašutistu stejně velký odpor vzduchu.

Pedagogická poznámka: Jde o opakované zadání příkladu 7 z hodiny 010204. Jde nejen o zopakování 1. Newtonova zákona, ale o podrobnější rozbor příkladu díky znalosti Newtonova vzorce pro odpor vzduchu.

Aerodynamická vztlaková síla
Vzniká při pohybu předmětů vzduchem (křídlo, list helikoptéry, dětský drak). Na předměty, které vzhledem ke vzduchu stojí, nepůsobí (letadlo se musí rozjet po vzletové dráze).
Kromě rychlosti je rozhodujícím faktorem **tvar a postavení vůči proudu vzduchu**:



Křídlo rozdělí vzduch, který ho obtéká do dvou proudů:

- horní proud: průřez, kterým vzduch protéká se zmenšuje $\Rightarrow$ zvětšuje se rychlost proudícího vzduchu $\Rightarrow$ zmenšuje se tlak (Bernoulliho rovnice),
- dolní proud: průřez, kterým vzduch protéká se zvětšuje $\Rightarrow$ zmenšuje se rychlost proudícího vzduchu $\Rightarrow$ zvětšuje se tlak (Bernoulliho rovnice)

$\Rightarrow$ na spodní stranu křídla působí větší tlak než na horní stranu $\Rightarrow$ na křídlo působí výsledná síla směrem vzhůru.

Dodatek: Roli hraje také reakce na sílu, kterou křídlo působí na vzduch a mění dráhu jeho pohybu (například u draka).

Př. 4: Odhadni velikost odporové síly působící na dlaň ruky, vysune-li ji automobilový závodník z auta jedoucího rychlostí $220\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$. Předpokládej, že dlaň je postavena kolmo na proud vzduchu. Obsah dlaně je 0,017 m^2, součinitel odporu 1,12 a hustota vzduchu 1,3 kg/m^3.

$v = 220\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1} \doteq 61{,}1\,\mathrm{m}\cdot s^{-1}$, $S = 0{,}017 m^2$, $C = 1{,}12$, $\rho = 1{,}3\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$, $F = ?$

Dosadíme do vzorce pro odporovou sílu: $F = \frac{1}{2} C\rho S v^2$.

$F = \frac{1}{2} C\rho S v^2 = \frac{1}{2}\cdot 1{,}12\cdot 1{,}3\cdot 0{,}017\cdot 61{,}1^2\ \mathrm{N} \doteq 50\,\mathrm{N}$

Na dlaň závodníka bude působit přibližně síla 50 N.

Př. 5: Odhadni velikost odporové síly, která by působila na Muže na křídle letadla (Pan Tau). Cestovní rychlost dopravních letadel ve výšce 10 km přesahuje 850 km/h. Muž stojí čelem ke směru letu. Ostatní veličiny odhadni. Najdi další důvody, proč se člověk na křídle cestovního letadla nemůže udržet.

Plochu člověka budeme považovat za obdélník o výšce 160 cm (výška bez hlavy) a šířce 45 cm.
Stojící člověk připomíná přibližně desku $\Rightarrow$ $C = 1{,}12$.
Hustota vzduchu se mění s výškou $\Rightarrow$ ve výšce 10 km je hustota vzduchu $\rho = 0{,}41\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$.
$v = 850\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1} \doteq 236\,\mathrm{m}\cdot s^{-1}$, $a = 1{,}6\,\mathrm{m}$, $b = 0{,}45\,\mathrm{m}$, $C = 1{,}12$, $\rho = 0{,}41\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$, $F = ?$

Dosadíme do vzorce pro odporovou sílu: $F = \frac{1}{2} C\rho S v^2 = \frac{1}{2} C\rho a b v^2$.

$F = \frac{1}{2} C\rho a b v^2 = \frac{1}{2}\cdot 1{,}12\cdot 0{,}41\cdot 1{,}6\cdot 0{,}45\cdot 236^2\ \mathrm{N} \doteq 9200\,\mathrm{N}$ (téměř tíha jedné tuny).

Ve výšce 10 km je velmi nízká teplota ($-50\,°\mathrm{C}$) a nízká hustota vzduchu (potíže při dýchání).
Na pana Tau by na křídle letadla působila síla 9200 N..

Př. 6: Urči minimální průměr kruhového padáku, který by zaručil, že budeš padat k zemi maximální rychlostí $5\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

$m = 75\,\mathrm{kg}$, $C = 1{,}33$, $\rho = 1{,}3\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$, $v = 5\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, $d = ?$
Stejně jako u příkladu 5 vyjdeme z toho, že při pádu rovnoměrnou rychlostí se vyrovná velikost tíhové síly a odporu vzduchu.

$F_g = F$

$mg = \frac{1}{2} C S \rho v^2 = \frac{1}{2} C \pi r^2 \rho v^2$

$\frac{2mg}{\pi C \rho v^2} = r^2 \ \Rightarrow\ r = \sqrt{\frac{2mg}{\pi C\rho v^2}}$

Dosazení: $r = \sqrt{\frac{2mg}{\pi C\rho v^2}} = \sqrt{\frac{2\cdot 75\cdot 10}{\pi\cdot 1{,}33\cdot 1{,}3\cdot 5^2}}\ \mathrm{m} = 3{,}3\,\mathrm{m} \ \Rightarrow\ d = 6{,}6\,\mathrm{m}$.

Člověk o hmotnosti 75 kg potřebuje padák o průměru 6,6 m.

Pedagogická poznámka: Nedoporučuji odvozovat vzorec přímo pro průměr, slabším žákům se zbytečně ztěžuje sledování výpočtu.

Př. 7: Urči nejvyšší rychlost, kterou může dopadnout na zem při volném pádu se započtením odporu vzduchu pivní láhev. Její hmotnost je 215 g, průměr dna 6,2 cm, koeficient odporu pro láhev padající dnem dolů je přibližně 1.

$m = 215\,\text{g} = 0,215\,\text{kg}$ $\quad d = 6,2\,\text{cm} \Rightarrow r = 3,1\,\text{cm} = 3,1\cdot 10^{-2}\,\text{m}$ $\quad C = 1$ $\quad \rho = 1,3\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$

$v = ?$ $\quad h = ?$

Uvažujeme-li při pádu tělesa v zemské atmosféře odpor vzduchu, působí na těleso dvě síly: tíha směrem dolů a odpor vzduchu proti směru pohybu, tedy směrem nahoru. Výslednice těchto dvou sil uděluje předmětu zrychlení. Zpočátku předmět padá pomalu a odpor vzduchu je malý, výslednice obou sil směřuje dolů a těleso dále zrychluje. Tím se jeho rychlost zvětšuje a s ní stoupá i odpor vzduchu, až vyrovná tíhu tělesa. V tomto okamžiku přestane těleso zrychlovat. Maximální rychlost, kterou může spadnout na zem je tedy rychlost, při které odpor vzduchu vyrovná tíhu tělesa.

Tíha lahve: $F_g = mg$ Odpor vzduchu: $F = \frac{1}{2}CS\rho v^2$

$$F_g = F$$

$$mg = \frac{1}{2}CS\rho v^2$$

$$\frac{2mg}{CS\rho} = v^2 \;\Rightarrow\; v = \sqrt{\frac{2mg}{CS\rho}} = \sqrt{\frac{2mg}{C\pi r^2\rho}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2mg}{C\pi r^2\rho}} = \sqrt{\frac{2\cdot 0,215\cdot 10}{1\cdot\pi\left(3,1\cdot 10^{-2}\right)^2\cdot 1,3}}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1} \doteq 33\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1} = 120\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$$

Pivní láhev může na zem dopadnout maximálně rychlostí $33\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Dodatek: Parašutisté nacvičují volný pád ve větrném tunelu v proudu vzduchu o rychlosti 180 - 200 km/h.

Př. 8: Pomocí počítačového modelu můžeme zjistit, že rychlosti $30\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ by láhev dosáhla po pádu z 95 metrů, rychlosti $33\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ pak po pádu z výšky 270 m. Urči v obou případech, jaká část potenciální energie láhve se změnila na kinetickou energii a jaká část se spotřebovala na překonávání odporu vzduchu.

$v = 30\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, $h = 95\,\text{m}$

$\frac{E_k}{E_p} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{mgh} = \frac{v^2}{2gh} = \frac{30^2}{2\cdot 10\cdot 95} = 0,47 \;\Rightarrow$ 47% potenciální energie se změní na kinetickou energii $\Rightarrow$ 53% potenciální energie se spotřebuje na překonávání odporu vzduchu.

$v = 33\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, $h = 270\,\text{m}$

$\frac{E_k}{E_p}=\frac{\frac{1}{2}mv^2}{mgh}=\frac{v^2}{2gh}=\frac{33^2}{2\cdot 10\cdot 270}=0,20$ $\Rightarrow$ 20% potenciální energie se změní na kinetickou energii $\Rightarrow$ 80% potenciální energie se spotřebuje na překonávání odporu vzduchu.

Př. 9: Automobil zrychlil z 90 km/h na 130 km/h. Kolikrát se zvětšil odpor vzduchu?

$v_1 = 90\,\mathrm{km/h} = 25\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ $\quad$ $v_2 = 130\,\mathrm{km/h} = 36\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ $\quad$ $k = ?$

$$k=\frac{F_2}{F_1}=\frac{\frac{1}{2}CS\rho v_2^2}{\frac{1}{2}CS\rho v_1^2}=\frac{v_2^2}{v_1^2}=\frac{36^2}{25^2}=2,1$$

Odpor vzduchu působící na auto se zvětší 2,1 krát.

Shrnutí: Odpor vzduchu můžeme určit vzorcem $F=\frac{1}{2}CS\rho v^2$.